Concours blanc

Option informatique, deuxième année

Julien Reichert

Partie 1 : Logique et calcul des propositions

Lors d'une séance d'un jeu informatique dérivé de la mythologie grecque, vous êtes accompagné par un couple de Sphinx. Ces créatures posent des énigmes logiques pour vous aider à progresser dans le jeu. Les énigmes suivent une règle que les Sphinx respectent scrupuleusement. Lorsque les Sphinx énoncent cette règle, ils disent toujours la vérité. Le premier Sphinx qui vous accompagne a énoncé la règle suivante : « Dans les énigmes, je peux soit dire la vérité, soit mentir. Mais, pour une énigme donnée, la première et la dernière de mes affirmations seront de la même nature (soit vérité, soit mensonge), et toutes les autres affirmations seront de la nature opposée à ces deux là (mensonge, respectivement vérité, si les premières et dernières sont des vérités, respectivement des mensonges) ». Le second Sphinx a énoncé la règle suivante : « Je suivrai la même règle que mon compagnon ».

Question 1.1 : Considérons que l'un des Sphinx fait une suite de n déclarations A_i dans une même énigme, proposer une formule du calcul des propositions qui représente la règle qu'il respecte (on évitera les points de suspension).

Vous vous retrouvez face à trois escaliers, l'un à gauche, l'autre à droite et le dernier au milieu entre les deux autres.

Le premier Sphinx P énonce les affirmations suivantes :
- l'escalier de gauche est sûr ;
- l'escalier du milieu est sûr ou celui de droite n'est pas sûr.

Le second Sphinx S énonce les affirmations suivantes :
- ni l'escalier de gauche, ni celui du milieu ne sont sûrs ;
- si les escaliers de gauche ou de droite sont sûrs, alors l'escalier du milieu est sûr.

Nous noterons G, M et D les variables propositionnelles associées au fait que les escaliers de gauche, du milieu et de droite sont sûrs. Nous noterons P_1 et P_2, respectivement S_1 et S_2, les formules propositionnelles associées aux déclarations du premier Sphinx, respectivement du second Sphinx.

Question 1.2 : Représenter les déclarations des deux Sphinx sous la forme de formules du calcul des propositions P_1, P_2, S_1 et S_2 dépendant des variables G, M et D.

Question 1.3 : Appliquer la règle respectée par les Sphinx que vous avez proposée pour la première question. Nous noterons P, respectivement S, la formule du calcul des propositions dépendant des variables P_1 et P_2, respectivement S_1 et S_2, qui correspond au respect de la règle par le premier Sphinx, respectivement le second Sphinx, dans cette énigme. Nous noterons R la formule du calcul des propositions dépendant des variables P et S qui décrit le respect global des règles par les deux Sphinx dans cette énigme.

Question 1.4 : En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité, par exemple), déterminer quel est (ou quels sont) le (ou les) escalier(s) qui est (ou sont) sûr(s). On indiquera explicitement les résultats intermédiaires correspondant aux formules P_1, P_2, P, S_1, S_2 et S.

Vous vous retrouvez plus tard face à trois portes de couleurs rouge, verte et bleue. Seul le premier Sphinx s'exprime et énonce les affirmations suivantes :

— la porte rouge n'est pas sûre ou la porte verte est sûre ;
— si les portes rouge et verte sont sûres alors la porte bleue n'est pas sûre ;
— la porte verte n'est pas sûre mais la porte bleue est sûre.

Nous noterons P_3, P_4 et P_5 les formules propositionnelles associées aux déclarations du premier Sphinx. Nous noterons R, V et B les variables propositionnelles associées au fait que les portes rouge, verte et bleue sont sûres.

Question 1.5 : Représenter les déclarations du Sphinx sous la forme de formules du calcul des propositions P_3, P_4 et P_5 dépendant des variables R, V et B.

Question 1.6 : Appliquer la règle respectée par le premier Sphinx que vous avez proposée pour la première question. Nous noterons P la formule du calcul des propositions dépendant des variables P_3, P_4 et P_5 qui correspond au respect de la règle par le premier Sphinx dans cette énigme.

Question 1.7 : En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan, par exemple), déterminer quelle est (ou quelles sont) la (ou les) porte(s) qui est (ou sont) sûre(s).

Partie 2 : Automates et langages

Nous utiliserons ici les notations usuelles du cours.

Soit $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ l'extension de δ définie pour tout $q \in Q$, pour tout $a \in \Sigma$ et pour tout $w \in \Sigma^*$ par $\delta^*(q, \varepsilon) = q$ et $\delta^*(q, wa) = \delta(\delta^*(q, w), a)$.

Question 2.1 : Donner, sans les justifier, deux expressions régulières ou ensemblistes représentant les langages sur $\Sigma = \{a, b\}$ reconnus par les automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ dont la description figure ci-après.

$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, A, \{C\}, \delta_1)$, avec $Q_1 = \{A, B, C\}$ et :

— $\delta(A, a) = B$;
— $\delta(B, a) = C$;
— $\delta(C, a) = C$;
— $\delta(A, b) = A$;
— $\delta(B, b) = A$;
— $\delta(C, b) = C$.

$\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, D, \{E\}, \delta_2)$, avec $Q_2 = \{D, E, F\}$ et :

— $\delta(D, a) = E$;
— $\delta(E, a) = E$;
— $\delta(F, a) = F$;
— $\delta(D, b) = F$;
— $\delta(E, b) = F$.
— $\delta(F, b) = F$;

Soit l'opération interne $\oplus$ sur les automates finis complets déterministes (avec les notations intuitives) définie par :

$$\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, (i_1, i_2), F_1 \times (Q_2 \setminus F_2) \cup (Q_1 \setminus F_1) \times F_2, \delta)$$

avec $\forall q_1 \in Q_1, \forall q_2 \in Q_2, \forall a \in \Sigma, \delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$.

Question 2.2 : Construire l'émondé de l'automate $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ en reprenant les exemples précédents.

Question 2.3 : Caractériser le langage reconnu par cet automate par une expression régulière ou ensembliste.

Question 2.4 : Montrer que : si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont des automates finis complets déterministes alors $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ est un automate fini complet déterministe.

Question 2.5 : Montrer que

$$\forall m \in \Sigma^*, \forall o_1, d_1 \in Q_1, \forall o_2, d_2 \in Q_2,\ \delta^*((o_1, o_2), m) = (d_1, d_2) \Leftrightarrow \delta_1^*(o_1, m) = d_1 \wedge \delta_2^*(o_2, m) = d_2.$$

Question 2.6 : Soient A_1 et A_2 des automates finis complets déterministes, montrer que :

$$m \in L(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2) \Leftrightarrow (m \in L(\mathcal{A}_1) \wedge m \notin L(\mathcal{A}_2)) \vee (m \in L(\mathcal{A}_2) \wedge m \notin L(\mathcal{A}_1)).$$

Question 2.7 : Quelle relation liant les langages reconnus par les automates $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ peut-on en déduire ?

Partie 3 : Exercice sur les langages rationnels

En plus des notations usuelles du cours, on dit / rappelle qu'un mot f sur Σ, de longueur non nulle, est un facteur d'un mot u sur Σ s'il existe deux mots x et y sur Σ avec $u = xfy$; si x est le mot vide, on précise que f est un préfixe de u, et si y est le mot vide, on dit que f est un suffixe de u.

Un mot peut posséder plusieurs occurrences d'un même facteur f. Supposons que l'on ait $\Sigma = \{a, b\}$ et $f = aabaa$. Le mot *baabaabbaabaaa* contient deux occurrences disjointes du facteur f, de même que le mot *aabaaaabaaa*. Le mot *abaabaaabaabb* contient deux occurrences non disjointes du facteur f, de même que le mot *aabaabaa* ; dans ce dernier cas, la première occurrence de f est un préfixe du mot *aabaabaa* alors que la seconde occurrence en est un suffixe.

Dans tout l'exercice, Σ désigne un alphabet et f désigne un mot de longueur non nulle sur Σ.

Question 3.1 : Montrer que le langage L_1 sur Σ des mots qui contiennent au moins une occurrence du facteur f est rationnel.

Question 3.2 : Montrer que le langage L_2 sur Σ des mots qui contiennent au moins deux occurrences disjointes du facteur f est rationnel.

Question 3.3 : Montrer que le langage L_3 sur Σ des mots qui contiennent au moins deux occurrences non disjointes du facteur f est rationnel.

Question 3.4 : Montrer que le langage L_4 sur Σ des mots qui contiennent exactement une occurrence du facteur f est rationnel.

Partie 4 : Encore un exercice sur les langages rationnels

Si L est un langage sur un alphabet fini Σ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $L(n)$ le langage formé par les mots de L qui sont de longueur n.

Question 4.1 : Justifier que le langage $L(n)$ est de cardinal fini.

Dans la suite, on note u_n^L le cardinal du langage $L(n)$.

Question 4.2 : Dans cette question, on pose $\Sigma = \{a, b, c\}$ et L est le langage des mots finis sur Σ qui contiennent au moins un c. Ce langage est donné par l'expression rationnelle $(a+b)^*c\Sigma^*$.

a) Dessiner un automate déterministe à deux états qui reconnaît exactement le langage L.

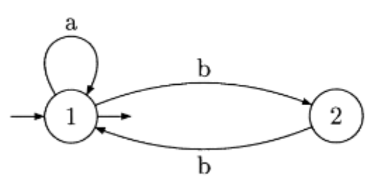
Pour les trois sous-questions suivantes, soit n un entier naturel non nul.

b) Dessiner un automate qui reconnaît exactement le langage $L(n)$.

c) On suppose $n \geq 2$. Soit U_{n-1} le langage $\Sigma^*(n-1)$. Démontrer que $L(n)$ est la réunion disjointe des langages $(a+b)L(n-1)$ (abus de notation ici) et cU_{n-1}. En déduire la relation de récurrence $u_n^L = 2u_{n-1}^L + 3^{n-1}$.

d) Exprimer u_n^L en fonction de n.

Question 4.3 : Soit L le langage sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ reconnu par l'automate $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, 1, \{1\}, \delta)$ ci-après :



a) Donner une expression rationnelle de L.

b) Expliciter la suite $(u_n^L)_{n \geq 1}$.